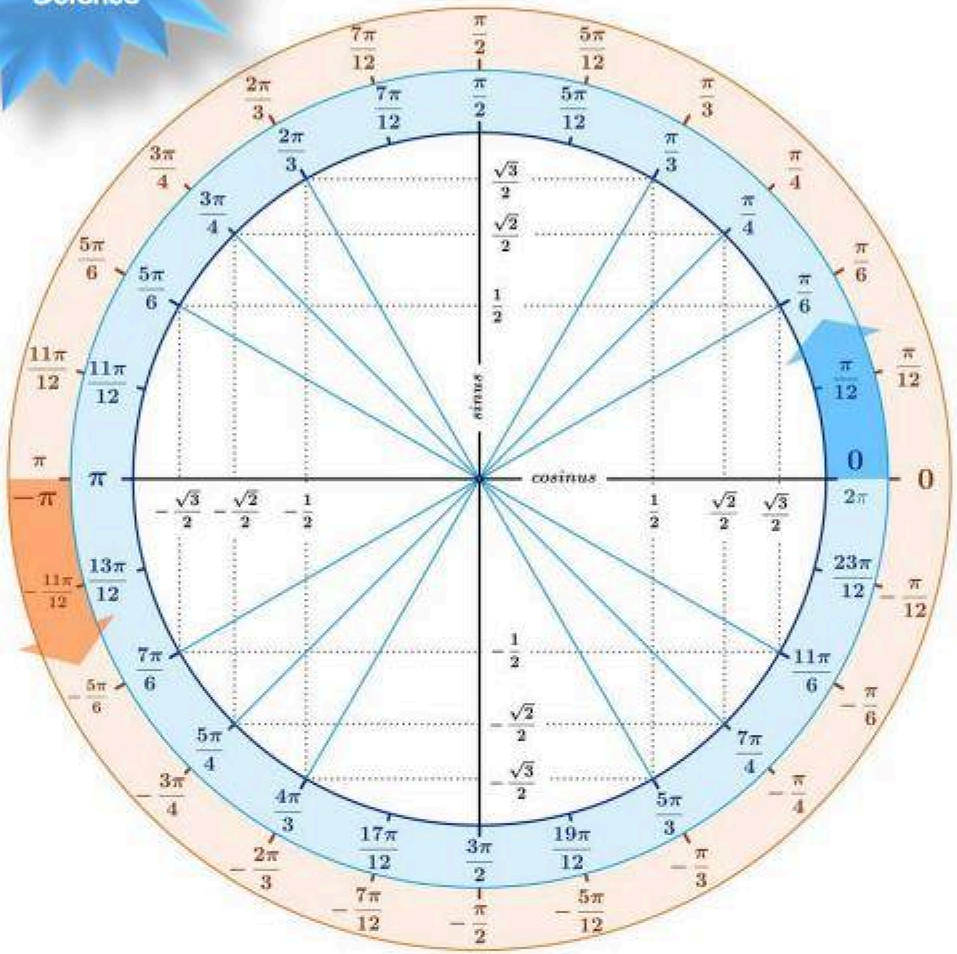
Formulaire sur les complexes

Bac Science

Proposé par : Mr.Ezzeddine



tuniTests.tn

نجاحك يهمنا

Cercle trigonométrique

❶ Soit $Z = x + iy$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

• $\overline{Z} = x - iy$	• $\overline{\overline{Z}} = Z$
• $\|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$	• $\overline{Z + Z'} = \overline{Z} + \overline{Z'}$
• $Z\overline{Z} = \|Z\|^2 = x^2 + y^2$	• $\overline{Z \times Z'} = \overline{Z} \times \overline{Z'}$
• $Z + \overline{Z} = 2\,Re(Z) = 2x$	• $\overline{\left(\frac{Z}{Z'}\right)} = \frac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$; $Z' \neq 0$
• $Z - \overline{Z} = 2i\,Im(Z) = 2iy$	• $\overline{Z^n} = (\overline{Z})^n$; $Z \neq 0 ; n \in \mathbb{Z}$

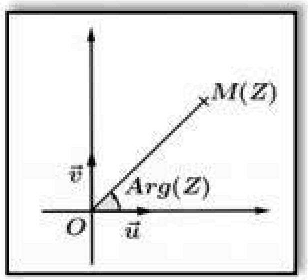
❷ Soit A , B , C et D des points du plan , on a :

- $Aff(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A$
- $Aff(\alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{CD}) = \alpha\,(Z_B - Z_A) + \beta\,(Z_D - Z_C)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

❸ Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé . $Z = x + iy \in \mathbb{C}^*, M(Z)$, on a :

- $|Z| = OM$
- $AB = |Z_B - Z_A|$
- $|Z + Z'| \leq |Z| + |Z'|$

❹ Soit $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé .



$Z \in \mathbb{C}^*, M(Z)$, on a :

$$\boxed{Arg(Z) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})[2\pi]}$$

❺ $\forall\, Z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on a :

- $Z = |Z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)$: forme trigonométrique
- $Z = [r, \theta]$: forme polaire

Avec : $r = |Z|$; $Arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$; $\cos\theta = \frac{x}{r}$ et $\sin\theta = \frac{y}{r}$

❻ Soient $Z = [r,\theta]$ $et\ Z' = [r',\theta']$, on a :

Forme polaire	Module	Argument
$\overline{Z} = [r, -\theta]$	$\lvert Z\rvert = \lvert\overline{Z}\rvert$	$\arg(\overline{Z}) \equiv -\arg(Z)\ [2\pi]$
$Z \times Z' = [rr', \theta + \theta']$	$\lvert Z \times Z'\rvert = \lvert Z\rvert \times \lvert Z'\rvert$	$\arg(Z \times Z') \equiv \arg(Z) + \arg(Z')\ [2\pi]$
$\frac{1}{Z} = [\frac{1}{r}, -\theta]$	$\left\lvert\frac{1}{Z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert Z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{Z}\right) \equiv -\arg(Z)\ [2\pi]$
$\frac{Z}{Z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta']$	$\left\lvert\frac{Z}{Z'}\right\rvert = \frac{\lvert Z\rvert}{\lvert Z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{Z}{Z'}\right) \equiv \arg(Z) - \arg(Z')\ [2\pi]$
$Z^n = [r^n, n\theta]$	$\lvert Z^n\rvert = \lvert Z\rvert^n$	$\arg(Z^n) \equiv n \times arg(Z)[2\pi]$
$\lambda Z = [\lambda r, \theta]$ $et\ \lambda > 0$	$\lvert\lambda Z\rvert = \lambda\lvert Z\rvert$	$\arg(\lambda Z) \equiv \arg(Z)\ [2\pi]$
$\lambda Z = [-\lambda r, \theta + \pi]$ $et\ \lambda < 0$	$\lvert\lambda Z\rvert = -\lambda\lvert Z\rvert$	$\arg(\lambda Z) \equiv (\arg(Z) + \pi)\ [2\pi]$

❼ (*) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow z = 0\ ou\ \arg(Z) = k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

(*) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(Z) = 0\ et\ Z \neq 0 \Leftrightarrow Z = -\overline{Z}\ et\ Z \neq 0$
$\Leftrightarrow \arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$

❽ Soit A , B , C et D des points du plan , on a :

- $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{AB}}) \equiv Arg(Z_B - Z_A)[2\pi]$
- $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv Arg\left(\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}\right)[2\pi]$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \in i\mathbb{R}$
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$

❾

- **Formule de Moivre** : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
  $\forall\theta \in \mathbb{R}\ ; \forall n \in \mathbb{Z}$
- **Formule d'Euler** : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

- $Z = r\,e^{i\theta}$: **forme exponentielle** . Avec : $r = \lvert Z\rvert$, $Arg(Z) \equiv \theta[2\pi]$

Soit $Z = r\,e^{i\theta}$; $Z' = r'\,e^{i\theta'}$, tels que : $r, r' > 0\ et\ \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$\overline{Z} = r\,e^{-i\theta}$ $\qquad$ $\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} \times e^{-i\theta}$

$Z \times Z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad$ $\frac{Z}{Z'} = \frac{r}{r'}\ e^{i(\theta-\theta')}$

$Z^n = r^n e^{in\theta}$

Cas particuliers : $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$; $1 = e^{i0}$; $-1 = e^{i\pi}$

❿ Soit $\theta\ et\ \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$	$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$	$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$	$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

★ ★ ★ ★ ★ Equation à cœfficient complexe ★ ★ ★ ★ ★

★ Si $\Delta = i\alpha$

- $\alpha \succ 0 \Rightarrow \Delta = \frac{\alpha}{2}(2i) = [\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)]^2$

  $\Rightarrow z' = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)$ et $z'' = -[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(1+i)]$

- $\alpha \prec 0 \Rightarrow \Delta = -\frac{\alpha}{2}(-2i) = [\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}(1-i)]^2$

  $\Rightarrow z' = \sqrt{-\frac{\alpha}{2}}(1-i)$ et $z'' = -[\sqrt{-\frac{\alpha}{2}}(1-i)]$

★ **Soit $T(z) = az^2 + bz + c$, ou a,b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$.**

⊗ **Si z' et z'' sont les solutions dans C de l'équation $T(z) = 0$ alors on a :**

$$z' + z'' = -\frac{b}{a} \text{ et } z' \cdot z'' = \frac{c}{a}$$

⊗ **$T(z) = az^2 + bz + c = a(z-z')(z-z'')$**

⊗ **Si $a + b + c = 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : 1 et $\frac{c}{a}$.**

⊗ **Si $a - b + c = 0$ alors l'équation $T(z) = 0$ admet deux solutions : - 1 et $-\frac{c}{a}$.**

Point méthode :

① Résolution d'une équation de troisième degré :

Pour résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$ ou $P(z) = a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_4$, ou a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des nombres complexes, tels que $a_1 \neq 0$ connaissant l'un des solutions z_0 :

- **On calcule les trois nombres complexes a, b et c tels que :**
  $P(z) = (z-z')(az^2 + bz + c)$.
- **On résout l'équation $az^2 + bz + c = 0$.**

② Résolution d'une équation bicarrée:

Pour résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$ ou $P(z) = az^4 + bz^2 + c$, ou a, b et c sont des nombres complexes, tels que $a \neq 0$:

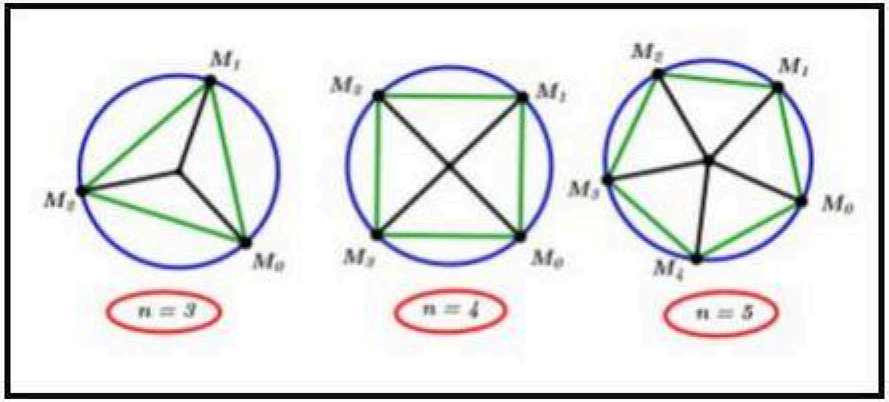
- **On pose $Z = z^2$ et on détermine Z' et Z'' solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :**
  $aZ^4 + bZ^2 + c = 0$
- **On cherche les racines carrées de Z' et Z''.**

★ ★ ★ ★ ★ Racine niéme d'un nombre complexe ★ ★ ★ ★ ★

L'équation : $Z^n = Z_0 = Re^{i\theta}$; $R > 0$ admet exactement n solutions notées :

$$Z_k = \sqrt[n]{R}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} ; k \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \text{ et} \left(\sqrt[n]{R}\right)^n = \left(R^{\frac{1}{n}}\right)^n = R$$

❋ Pour $n \geq 3$, les points images des nombres complexes Z_k forment un polygone régulier inscrit sur un cercle de centre l'origine du repère et de rayon $\sqrt[n]{R}$.



Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont les solutions de l'équation $\boldsymbol{Z^n = 1}$ admet exactement n solutions notées : $\boldsymbol{Z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}\ ; k \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$

Reflexe

❶ $i^n = \begin{cases} 1 & si\ n = 4p \\ i & si\ n = 4p+1 \\ -1 & si\ n = 4p+2 \\ -i & si\ n = 4p+3 \end{cases}$

❷ $(1+i)^n = \begin{cases} (1+i)^{2p} & si\ n\ pair \\ (1+i)^{2p+1} & si\ n\ impair \end{cases} = \begin{cases} (2i)^p \\ (2i)^p \times (1+i) \end{cases} = \cdots$

De même pour $(1-i)^n = \cdots = \begin{cases} (-2i)^p \\ (-2i)^p \times (1+i) \end{cases} = \cdots$.

❸ $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $j^2 = \bar{j} = \frac{1}{j}$; $j^3 = 1$

1 , j et $\bar{j}$ sont les racines cubiques de l'unité

❹ OAB est un triangle isocèle rectangle en O si et seulement si :

$\begin{cases} OA = OB \\ (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |Z_A - Z_O| = |Z_B - Z_O| \\ \frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} \in i\mathbb{R} \end{cases}$

❺ ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

1ére Méthode :

$AB = AC = BC \Leftrightarrow |Z_B - Z_A| = |Z_C - Z_A| = |Z_C - Z_B|$

2éme Méthode :

ABC est un triangle isocèle en A , tel que : $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Leftrightarrow\ AB = AC\ \ et\ \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

❻ ABCD est un parallélogramme si et seulement si :

1ére Méthode :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ ou $Z_{\overrightarrow{AD}} = Z_{\overrightarrow{BC}}$

$\Leftrightarrow Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$ ou $Z_D - Z_A = Z_C - Z_B$

2éme Méthode :

$(AB)\ //\ (DC)$ et $AB = DC \Leftrightarrow \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_D} \in \mathbb{R}$ et $|Z_B - Z_A| = |Z_C - Z_D|$

3éme Méthode :

Les deux diagonaux [AC]et [BD] se coupent en leurs milieux .

$\Leftrightarrow \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$

❼ ABCD est un rectangle si et seulement si :

1ére Méthode :

Trois angles droits $\Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{Z_D - Z_A}{Z_B - Z_A}$; $\frac{Z_C - Z_D}{Z_B - Z_D}$ et $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ sont imaginaires purs .

2éme Méthode : ABCD est un # et un angle droit .

❽ ABCD est un losange si et seulement si :

1ére Méthode : ABCD est un # dont deux côtés successives sont égaux .

2éme Méthode : Les deux diagonaux sont orthogonaux , se coupent en leurs milieux et ne sont pas égaux .

❾ ABCD est un carré si et seulement si :

1ére Méthode : ABCD est un rectangle dont les côtés successives sont égaux .

2éme Méthode : ABCD est un losange et un angle droit .

Formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}$